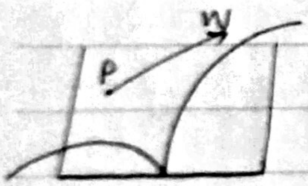
Μάθημα 17ο 05/12/16

Κάθετη καμπυλότητα



$$K_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}$$

Κύριες καμπυλότητες

$K_1(p) = \max\{K_n(w) \mid w \in T_pS, \|w\|=1\}$

$K_2(p) = \min\{ \qquad \}$

$L_p e_1(p) = K_1(p) e_1(p)$

$L_p e_2(p) = K_2(p) e_2(p)$

Καμπυλότητα Gauss

$K(p) = \det L_p = k_1(p) k_2(p)$

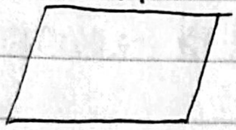
Μέση καμπυλότητα

$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{trace} L_p = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p))$

$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$, $H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

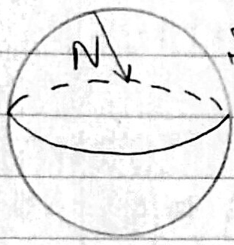
1)



$L_p = 0 \Rightarrow II_p = 0 \Rightarrow k_n(w) = 0$

$\Rightarrow k_1(p) = k_2(p) = 0 \Rightarrow K = 0, H = 0$

2)

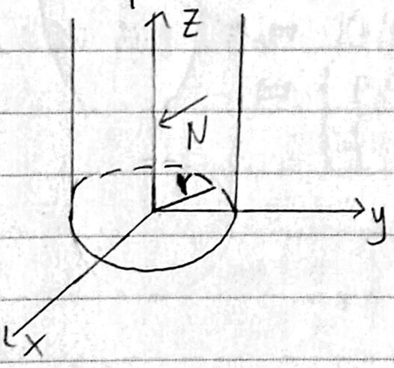


S_R^2

$L_p w = \frac{1}{R} w$, $L_p = \frac{1}{R} Id$, $II_p = \frac{1}{R} I_p$

$K = k_1 k_2 = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{R}$

3) Κύλινδρος



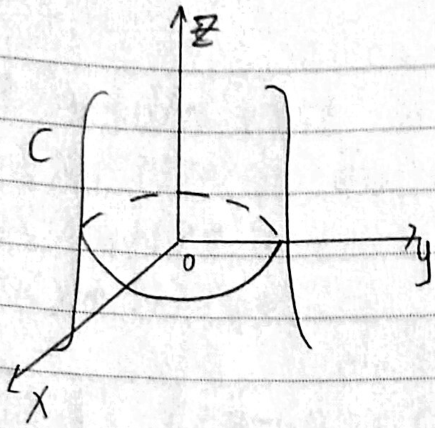
$S: x^2 + y^2 = r^2$

$L_p w = L_p(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0)$

$$\begin{cases} L_p(w_1, w_2, 0) = 1/r\,(w_1, w_2, 0) \\ L_p(0, 0, w_3) = 0 \cdot (0, 0, w_3) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ οι ιδιοτιμές του L_p είναι $\frac{1}{r}, 0. \Rightarrow k_1 = \frac{1}{r}, \ k_2 = 0.$

$K = 0$, $H = \frac{1}{2r}$



$c(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s))$

$\varphi > 0, \ (\dot{\varphi}(s))^2 + (\dot{\psi}(s))^2 = 1$

$K = -\dfrac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$

Υπάρχει εκ περιστροφής επιφάνεια που έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss;

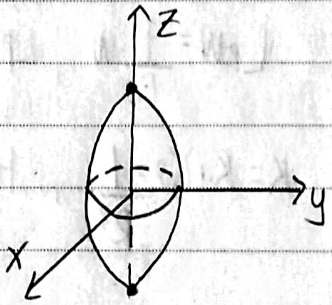
Εστω $K =$ σταθ. $= a > 0$

$\ddot{\varphi}(s) + a\varphi = 0$ δ.ε. $\varphi(s) = a\cos s$

$\dot{\varphi}(s) = -a\sin s$

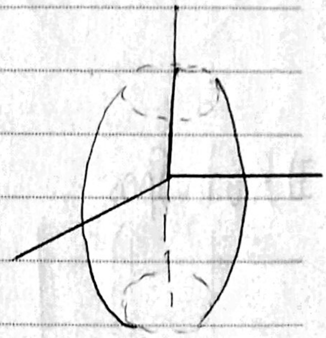
$\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 = 1 \Leftrightarrow \dot{\psi}^2 = 1 - a^2\sin^2 s.$

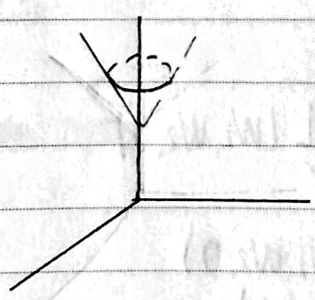
$\psi(s) = \int \sqrt{1 - a^2 \sin^2 s}\, ds$



- $a < 1$ ορίζεται για όλα τα s

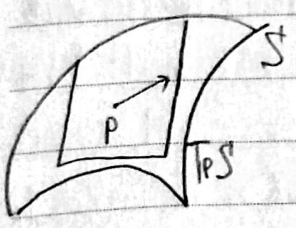
- $a > 1$, $\psi(s)$ $s \in (a, b)$ (δεν ορίζεται για όλα τα s)





- $a = 0$

Ταξινόμηση σημείων της επιφάνειας



$D_p = \{ w \in T_pS \,/\, II_p(w) = \pm 1 \} = \{ w = xe_1 + ye_2 \,/\, K_1(p)x^2 + K_2(p)y^2 = \pm 1 \}$

κωνική τομή

$\{e_1(p), e_2(p)\}$ κύριες διευθύνσεις

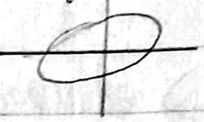
$\begin{cases} L_p e_1(p) = K_1(p) e_1(p) \\ L_p e_2(p) = K_2(p) e_2(p) \end{cases}$

$w = xe_1(p) + ye_2(p)$

$\mathrm{II}_p(w) = \langle L_p w, w\rangle = \langle L_p(xe_1+ye_2), xe_1+ye_2\rangle = \langle xk_1(p)e_1 + yk_2(p)e_2, xe_1+ye_2\rangle$

$\mathrm{II}_p(w) = k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2.$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σημείο $p \in S$ καλείται **(1)** ελλειπτικό ανν το D_p είναι έλλειψη ⇔ $k_1(p) \geq k_2(p) > 0$ ή $0 \geq k_1(p) \geq k_2(p)$ ⇔ II_p θετικώς ορισμένη ή II_p αρνητικώς ορισμένη ⇔ $K(p) > 0$

1) 

2) 

(2) υπερβολικό ανν το D_p είναι υπερβολή ⇔

(3) παραβολικό ανν το D_p είναι παραβολή ⇔ $K(p)=0$ και $H(p) \neq 0$. ⇔ II_p ημιορισμένη

(4) ισόπεδο ⇔ $k_1(p) = k_2(p) = 0$ ⇔ $K(p) = H(p) = 0$ ⇔ $\mathrm{II}_p = 0$ ⇔ $e = f = g = 0$ ⇔ $L_p = 0$

(5) ομφαλικό ⇔ $k_1(p) = k_2(p) \neq 0$ ⇔ $H^2(p) = K(p) \neq 0$ ⇔ $\mathrm{II}_p = k_1(p)\mathrm{I}_p$ ⇔ $L_p = k_1(p)Id$ $\{k_1 = k_2 \Leftrightarrow H^2 = K\}$

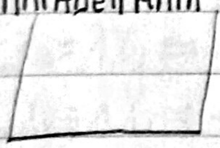
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:
1) $H^2(p) = K(p)$ ⇔ p είναι ομφαλικό ή ισόπεδο.
2) Τα ομφαλικά σημεία είναι ελλειπτικά.

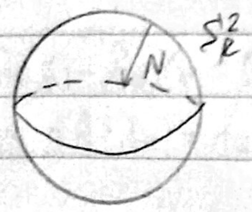
p είναι ομφαλικό ⇔ $k_1(p) = k_2(p) \neq 0$ ⇔ $H^2(p) = K(p) > 0$ ⇔ $\mathrm{II}_p = \lambda \mathrm{I}_p$, $\lambda \neq 0$ ⇔

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \ \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e = \lambda E \\ f = \lambda F \\ g = \lambda G \end{cases} \ \lambda \neq 0 \Leftrightarrow$$

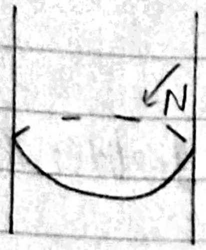
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \neq 0}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1)  $k_1 = k_2 = 0$ Όλα τα σημεία είναι ισόπεδα

2) 

$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$ Όλα τα σημεία είναι ομφαλικά

3) 

$K_1 = \frac{1}{R}$, $K_2 = 0$ Όλα τα σημεία είναι παραβολικά

4) 

μονόχωνο υπερβολοειδές   αλυσοειδές; έχω όλα τα σημεία υπερβολικά

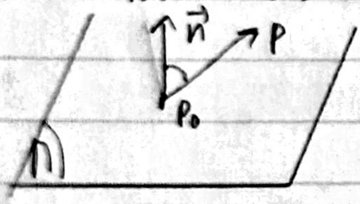
5) 

ελλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$

Όλα τα σημεία είναι ελλειπτικά

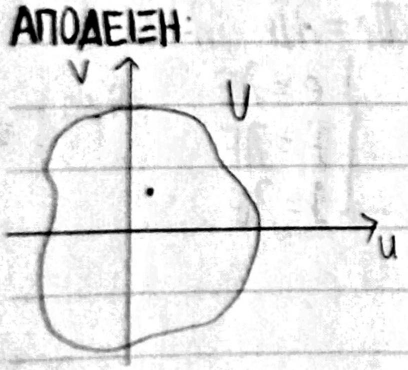
ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $p_0 \in S$. (i) Αν το p_0 είναι ελλειπτικό, τότε υπάρχει περιοχή V της p_0 στο S τέτοια ώστε $V \cap T_{p_0}S = \{p_0\}$ και το V περιέχεται σ' ένα ακριβώς από τους 2 ημιχώρους με ακμή τα $T_{p_0}S$

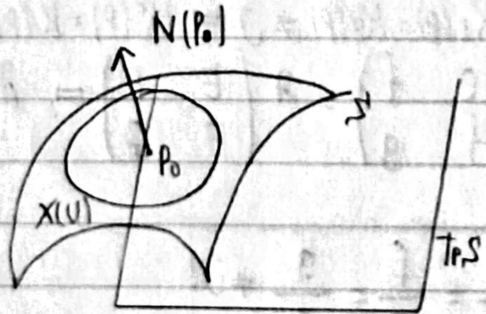
(ii) Αν το p_0 είναι υπερβολικό, τότε υπάρχουν σημεία της S κοντά στο p_0 τα οποία ανήκουν στους αντικείμενους ημιχώρους με ακμή το $T_{p_0}S$



$\langle \vec{P_0P}, \vec{n} \rangle$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:





Ορίζω τη συνάρτηση $h: U \to \mathbb{R}$

$h(u,v) = \langle X(u,v) - X(u_0,v_0), N(p_0) \rangle$

$h(u_0,v_0) = 0$. Η h είναι λεία

$$\begin{cases} h_u(u,v) = \langle X_u(u,v), N(p_0) \rangle \\ h_v(u,v) = \langle X_v(u,v), N(p_0) \rangle \end{cases}$$

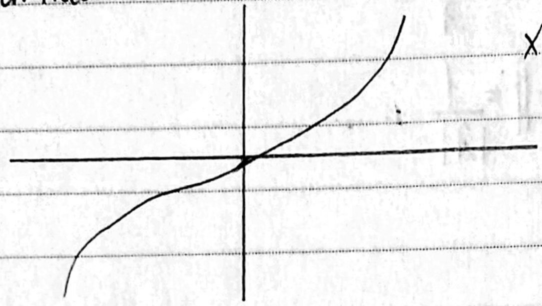
Παρατηρώ ότι $h_u(u_0,v_0)=0=h_v(u_0,v_0)$

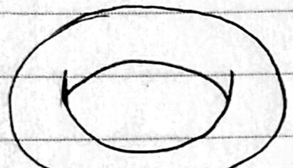
$h_{uu}(u_0,v_0)=\langle X_{uu}(\ ,v),\ N(P_0)\rangle$

$$\begin{cases} h_{uu}(u_0,v_0)=e(u_0,v_0) \\ h_{uv}(u_0,v_0)=f(u_0,v_0) \\ h_{vv}(u_0,v_0)=g(u_0,v_0). \end{cases}$$

Άρα, ο Εσσιανός πίνακας της h στο (u_0,v_0) είναι $\begin{pmatrix} e(u_0,v_0) & f(u_0,v_0) \\ f(u_0,v_0) & g(u_0,v_0) \end{pmatrix}$

Αν το P είναι ελλειπτικό





ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω S συνεκτική επιφάνεια με $k_1=k_2$, παντού (ή ισοδύναμα $H^2=K$ παντού) τότε η S είναι τμήμα επιπέδου ή σφαίρας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\begin{cases} L_p\, e_1(p)=k_1(p)\, e_1(p) \\ L_p\, e_2(p)=k_2(p)\, e_2(p) \end{cases} \Rightarrow L_p=\lambda(p)\, Id \quad ,\lambda(p)=k_1(p)=k_2(p)$

Ορίζεται μια συνάρτηση $\lambda: S\to\mathbb{R}$, $L_p=\lambda(p)Id$, $\forall p\in S$

$2H(p)=\text{trace}\, L_p = 2\lambda(p) \Rightarrow \lambda(p)=H(p)\ \forall p \Rightarrow \lambda=H.$

Έστω $X: U\to S$ σύστημα συντεταγμένων

$$\begin{cases} LX_u=\lambda X_u \Leftrightarrow -N_u=\lambda X_u \\ LX_v=\lambda X_v \Leftrightarrow -N_v=\lambda X_v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -N_{uv}=\lambda_v X_u+\lambda X_{uv} \\ -N_{vu}=\lambda_u X_v+\lambda X_{vu} \end{cases} \xrightarrow[X_{vu}=X_{uv}]{N_{vu}=N_{uv}}$$

$\lambda_v X_u-\lambda_u X_v=0 \Rightarrow \lambda_u=\lambda_v=0$

$\Rightarrow d\lambda(X_u)=\lambda_u=0,\ d\lambda(X_v)=\lambda_v=0 \Rightarrow d\lambda_p=0,\ \forall p\in S$

1) Έστω $\lambda = 0 \Rightarrow L_p = 0$, $\forall p \in S \Rightarrow dN_p = 0$, $\forall p \in S$.
$N: S \to S \Rightarrow N(p) =$ σταθερό διάνυσμα $= w$
$N(p) = (A, B, \Gamma) =$ σταθερό
Ορίζω την $h: S \to \mathbb{R}$, $h(p) = \langle p, (A, B, \Gamma) \rangle$
$w \in T_pS$, $dh_p(w) = \langle w, (A, B, \Gamma) \rangle = 0 \Rightarrow h =$ σταθ. $\Rightarrow Ax + By + \Gamma z =$ σταθ.

2) Έστω $\lambda \neq 0$. $\varphi: S \to \mathbb{R}^3$
$\varphi(p) = N(p) + \lambda p$, $\varphi = N + \lambda Id$, $d\varphi_p = dN_p + \lambda Id = -L_p + \lambda Id = 0$
$\varphi(p) = P_0 =$ σταθερό.
$N(p) + \lambda p = P_0 \Leftrightarrow p - \frac{1}{\lambda} P_0 = -\frac{1}{\lambda} N(p)$

$d\left(p, -\frac{1}{\lambda} P_0\right) = \|p - 1/\lambda \, P_0\| = \frac{1}{|\lambda|}$